Exercice 1 :

1) Equation cartésienne du plan (P) :

Puisque $\vec{n}(1;-1;1) \perp (P)$ alors l'équation cartésienne de (P) s'écrit sous la forme suivante : $x - y + z + c = 0$

Or $A(2;3;0) \in (P) \Rightarrow x_A - y_A + z_A + c = 0$

$\Rightarrow 2 - 3 + 0 + c = 0 \Rightarrow -1 + c = 0 \Rightarrow c = 1$

Donc : $\boxed{(P): x - y + z + 1 = 0}$

2) Représentation paramétrique de la droite (D) :

Puisque $(D) \perp (P)$ alors $\vec{n}(1;-1;1)$ le vecteur normal à (P) est aussi le vecteur directeur de la droite (D) ;

d'autre part on a $B(-1;1;2) \in (D)$ donc la représentation paramétrique de (D) est la suivante : $\boxed{(D): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})}$

3) Déterminons $(P) \cap (D)$:

Pour trouver cette intersection ; on résout le système suivant :

$$\begin{cases} x = -1 + t & (1) \\ y = 1 - t & (2) \\ z = 2 + t & (3) \\ x - y + z + 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

Dans la relation (4) on remplace x et y et z par les relations (1) et (2) et (3) ainsi on obtient l'équation :

$(-1 + t) - (1 - t) + (2 + t) + 1 = 0 \Rightarrow -1 + t - 1 + t + 2 + t + 1 = 0$

$\Rightarrow 3t + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$

Ainsi : $x = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$ et $y = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ et $z = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

D'où : $\boxed{(P) \cap (D) = \left\{H\left(\frac{-4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)\right\}}$

Exercice 2 :

1) Calculons $d(A;(P))$:

On a : $(P): 2x - y + z = 0$ et $A(2;-1;0)$

Donc : $d(A;(P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2 \times 2 - (-1) + 0|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$

2) Représentation paramétrique de la droite (D) :

Puisque $(D) \perp (P)$ alors $\vec{n}(2;-1;1)$ le vecteur normal à (P) est aussi le vecteur directeur de la droite (D) ; d'autre part on a $A(2;-1;0) \in (D)$ donc la représentation paramétrique de (D) est la suivante :

$$\boxed{(D): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})}$$

Les coordonnées de H :

Puisque le point H est le projeté orthogonal de A sur le plan (P) ; alors ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t & (1) \\ y = -1 - t & (2) \\ z = t & (3) \\ 2x - y + z = 0 & (4) \end{cases}$$

Dans la relation (4) on remplace x et y et z par les relations (1) et (2) et (3) ainsi on obtient l'équation :

$2(2 + 2t) - (-1 - t) + t = 0 \Rightarrow 4 + 4t + 1 + t + t = 0$

$\Rightarrow 6t + 5 = 0 \Rightarrow t = -\frac{5}{6}$

Ainsi : $x = 2 - 2\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{3}$ et $y = -1 + \frac{5}{6} = \frac{-1}{6}$ et $z = \frac{-5}{6}$

D'où : $\boxed{H\left(\frac{1}{3}; \frac{-1}{6}; \frac{-5}{6}\right)}$

3) Equation cartésienne du plan (Q) :

Puisque $(Q) \parallel (P)$ alors $\vec{n}(2;-1;1)$ le vecteur normal à (P) est aussi normal à (Q) ; donc l'équation cartésienne de (Q) s'écrit sous la forme suivante : $2x - y + z + c = 0$

Or $A(2;-1;0) \in (Q) \Rightarrow 2x_A - y_A + z_A + c = 0$

$\Rightarrow 2 \times 2 - (-1) + 0 + c = 0 \Rightarrow 5 + c = 0 \Rightarrow c = -5$

Donc : $\boxed{(Q): 2x - y + z - 5 = 0}$

Exercice 3 :

1) Equation cartésienne de la sphère (S_1) de centre $A(1;1;-1)$ et de rayon 2 :

$M(x;y;z) \in (S_1) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 2z + 1 = 4$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z - 1 = 0$

Donc : $\boxed{(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z - 1 = 0}$

2) a) Equation cartésienne de la sphère (S_2) de diamètre $[AB]$:

$M(x;y;z) \in (S_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z-3 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) + (y-1)^2 + (z+1)(z-3) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 3z + z - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 3 = 0$

Donc : $\boxed{(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 3 = 0}$

b) Centre et rayon de la sphère (S_2) :

On a : $M(x;y;z) \in (S_2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + z^2 - 2z = 3$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = 3 + 1 + 1$

$\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$

Ainsi $\boldsymbol{\Omega(0;1;1)}$ est le centre de (S_2) et $\boldsymbol{R = \sqrt{5}}$ est son rayon.

Remarque : il existe une autre façon de faire ; il suffit de remarquer que Ω est le milieu de $[AB]$ et que $R = \frac{AB}{2}$

3) Vq : $H\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{5}{2}\right)$ est le projeté orthogonal de Ω sur (P) :

Puisque H est le projeté orthogonal de Ω sur (P) donc ses coordonnées sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x = t & (1) \\ y = 1 & (2) \\ z = 1 + t & (3) \\ x + z - 4 = 0 & (4) \end{cases}$$

Dans la relation (4) on remplace x et y et z par les relations (1) et (2) et (3) ainsi on obtient l'équation :

$t + 1 + t - 4 = 0 \Rightarrow 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$

Ainsi : $x = \frac{3}{2}$ et $y = 1$ et $z = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

D'où : $\boxed{H\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{5}{2}\right)}$ est le projeté orthogonal de Ω sur (P).

4) Mq : le plan (P) coupe la sphère (S_2) selon un cercle :

On a :

$d(\Omega;(P)) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|0 + 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} < R = \sqrt{5}$

Donc le plan (P) coupe la sphère (S_2) selon un cercle de centre $H\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{5}{2}\right)$ qui est le projeté orthogonal de Ω sur (P) et de rayon : $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5 - \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Oarray.tn -Agra Blech- Oarray.tn
FB: révision bac science 2020 TN
Scanned by DocumentScanner | Lufick